Югорский физико-математический лицей

В.П. Чуваков

Шары
и
многогранники

Учебно-методическое пособие

Ханты-Мансийск
2014

Чуваков В. П. Шары и многогранники:
Учеб.-метод. пособие: 2-е изд., испр. и доп. Ханты-Мансийск: Югорский ФМЛ, 2014. 48 с.

В предлагаемом учебно-методическом пособии рассматриваются классические вопросы, описывающие различные варианты взаимного расположения сферы (шара) и других геометрических объектов: сфера проходит через заданные точки, описана около многогранника, касается плоскостей, вписана в многогранник, касается лучей. В приложении в качестве иллюстрации рассмотрено большое количество примеров.

В конце пособия приведен список задач для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса стереометрии, подготовки к выпускным и вступительным экзаменам, ЕГЭ.

Адресовано школьникам старших классов, абитуриентам, преподавателям.

Предисловие

Задачи по стереометрии на комбинацию сфер (шаров) с другими геометрическими объектами традиционно являются одними из самых сложных и интересных одновременно. Разнообразие вариантов взаимного расположения, трудности геометрического представления и изображения делают эту тему популярной на вступительных экзаменах в ведущие вузы России и ЕГЭ.

При решении таких задач важно провести методически грамотный анализ конфигурации, правильно понять условия взаимного расположения сферы (шара) и геометрических объектов, иметь хорошее геометрическое воображение. Как правило, только в этом случае удается сложную пространственную задачу разложить на элементы и решить.

В первых четырех параграфах данного учебного пособия проводится анализ различных вариантов взаимодействия сферы (шара) с другими геометрическими объектами и рассматриваются основные модели (конструкции) базовых конфигураций.

В приложении (§ 5) на различных по сложности примерах показано, как с помощью рассмотренных в пособии анализа и базовых конструкций можно моделировать различные комбинации сфер (шаров) с другими геометрическими объектами.

В конце пособия приведен список задач для самостоятельной работы.

Предлагаемое учебно-методическое пособие способствует выработке методических навыков правильного анализа стереометрических задач, развивает геометрическое воображение, помогает конструировать различные комбинации сферы с другими геометрическими объектами.

Пособие предназначено для углубленного изучения курса стереометрии, подготовки к выпускным экзаменам, ЕГЭ, вступительным экзаменам в вузы.

Основные определения и свойства

Определение 1. Плоскость касается шара (сферы), если она имеет с шаром (сферой) единственную общую точку.

Определение 2. Шар называется вписанным в многогранник, если он касается всех граней многогранника.

Замечание 1. Центр шара, вписанного в пирамиду, лежит внутри пирамиды. Расстояние от центра шара до каждой из граней пирамиды равно радиусу шара.

Замечание 2. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{ïîë} \cdot R$, где $S_{ïîë}$ – площадь полной поверхности пирамиды, R – радиус вписанного шара.

Определение 3. Биссекторной плоскостью двугранного угла с ребром l называется плоскость, проходящая через прямую l и биссектрису линейного угла.

Замечание 3. Биссекторная плоскость – множество точек пространства, равноудаленных от граней двугранного угла.

Определение 4. Плоскость, проходящая через середину отрезка AB, перпендикулярно этому отрезку, называется серединной перпендикулярной плоскостью отрезка AB.

Замечание 4. Геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от концов отрезка, является серединной перпендикулярной плоскостью этого отрезка.

Замечание 5. Если точки A и B лежат на сфере, то центр сферы лежит на серединной перпендикулярной плоскости отрезка AB.

Определение 5. Сфера называется описанной около многогранника, если все вершины многогранника лежат на сфере.

Замечание 6. Если около многогранника можно описать сферу, то ее центр лежит на пересечении серединных перпендикулярных плоскостей всех ребер многогранника.

Замечание 7. Если все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одним углом, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, описанной около основания.

Замечание 8. Если все грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним углом, то вершина пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание.

Замечание 9. Отрезки касательных, проведенных к данной сфере из одной точки, равны.

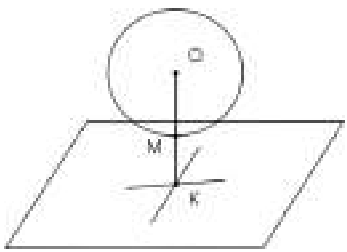
Признак касания сферы и плоскости.
Плоскость касается сферы тогда и только тогда, когда плоскость проходит через точку на сфере и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку.

Доказательство аналогично доказательству подобного свойства в планиметрии и предлагается читателю провести самостоятельно.

§ 1. Взаимное расположение шара и плоскости

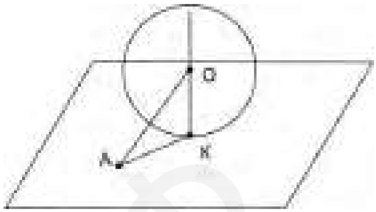
Первый вариант.
Если расстояние от центра шара до плоскости больше радиуса, то шар и плоскость не имеют общих точек.

$d = OK > OM = R.$

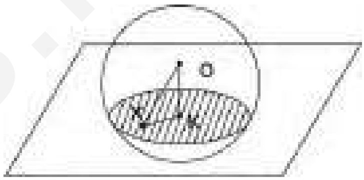


Второй вариант.
Если расстояние от центра шара до плоскости равно радиусу, то шар и плоскость имеют единственную общую точку и плоскость перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

$d = OK = OM = R, \quad AK \perp OK.$



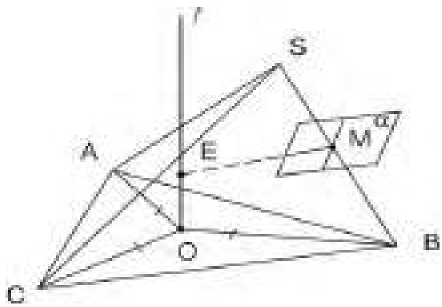
Третий вариант.
Если расстояние от центра шара до плоскости меньше радиуса $(OK = d < R = OM)$, то пересечение шара и плоскости есть круг радиуса $r = \sqrt{R^2 - d^2}$.
Верно и обратное, если точка X лежит в круге радиуса r ($XK < r$), то точка X лежит внутри шара радиуса
R $(OX = \sqrt{XK^2 + KO^2} < R)$.



§ 2. Описанные сферы

Теорема 1. *(О существовании описанной сферы)*
В произвольной треугольной пирамиде серединные перпендикулярные плоскости всех ребер имеют единственную общую точку, равноудаленную от всех вершин пирамиды. Общая точка является центром сферы, описанной около треугольной пирамиды.
Доказательство. Пусть $SABC$ – треугольная пирамида с основанием ABC, O – центр окружности, описанной около треугольника ABC.
Проведем через точку O прямую l, перпендикулярно плоскости ABC.

Произвольная точка, лежащая на этой прямой, равноудалена от точек A, B, C.



Пусть SB – боковое ребро пирамиды, M – середина ребра SB, α – серединная перпендикулярная плоскость ребра SB.

Докажем, что плоскость α пересекает прямую l.

Если $\alpha \parallel l$, то в плоскости α через точку M можно провести прямую $l_1 \parallel l$, $l_1 \perp SB$, $l_1 \parallel l \Rightarrow l \perp SB$.

Далее, $l \perp SB$, $l \perp ABC \Rightarrow SB \parallel ABC$. Противоречие.

Если $l \in \alpha$, то любая точка прямой l равноудалена от точек S, B. Это невозможно, так как l проходит через точку O, равноудалена от точек A, B, C и перпендикулярна плоскости ABC.

Таким образом, прямая и плоскость пересекаются в точке E, которая равноудалена от точек S, A, B, C и, следовательно, является центром сферы, описанной около треугольной пирамиды $SABC$. Теорема доказана.

Утверждение 2. Пусть $SA_1 \ \ldots \ A_n$ – произвольная пирамида с вершиной S и основанием $A_1 \ \ldots \ A_n$. Вокруг пирамиды можно описать шар тогда и только тогда, когда вокруг многоугольника $A_1 \ \ldots \ A_n$ можно описать окружность.

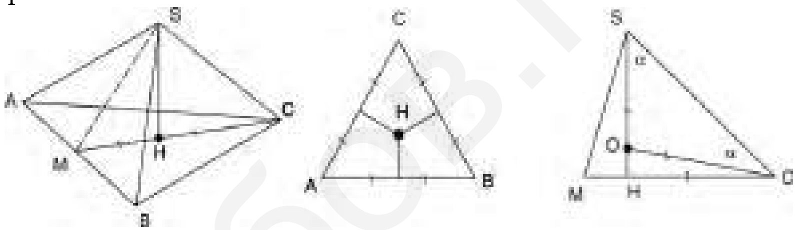
Доказательство. Если около пирамиды можно описать шар, то в сечении шара плоскостью основания получится многоугольник, вписанный в окружность. Обратно, пусть точка O – центр окружности радиуса R, описанной около основания.

Проведем перпендикуляр к плоскости основания через точку O. Тогда точка пересечения этого перпендикуляра и серединной перпендикулярной плоскости ребра $S A_m$ равноудалена от всех вершин пирамиды.

> *Замечание 2.1.* Центр сферы, описанной около произвольной пирамиды, лежит на перпендикуляре к основанию пирамиды, проведенном через центр описанной около основания окружности.

Утверждение 3. Центр сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, лежит на высоте пирамиды.

Доказательство. Пусть $SABC$ – правильная треугольная пирамида, $SA = SB = SC$, $AB = AC = BC$, M – середина ребра AB.



Так как пирамида правильная, то плоскость CSM является серединной перпендикулярной плоскостью ребра AB и проходит через высоту SH. Следовательно, высота пирамиды принадлежит серединным перпендикулярным плоскостям всех ребер основания.

Рассмотрим плоскость CSM. Если $\angle HSC = \alpha$, то $\angle HOC = 2\alpha$, $\angle OSC = \alpha$. Тогда $OS = R = OC$, $OH = R \cdot \cos(\angle HOC)$ и для вычисления радиуса можно использовать соотношение

$$SH = R + R\cos 2\alpha$$

Следствие 3.1. Радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра с ребром a, равен $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

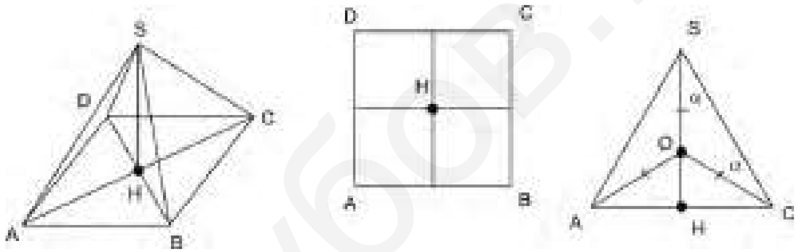
Действительно,

$$SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad MH = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \quad HC = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad SH = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{3}, \quad R = \frac{SH}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Утверждение 4. Центр сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, лежит на высоте пирамиды.

Доказательство. Пусть $SABCD$ – правильная четырехугольная пирамида, $SA = SB = SC = SD$, $AB = AD = BC = CD$. Так как высота пирамиды принадлежит серединным перпендикулярным плоскостям всех ребер основания, то центр сферы лежит на высоте.



Рассмотрим плоскость ASC. Если $\angle HSC = \alpha$, то $\angle OSC = \alpha$, $\angle HOC = 2\alpha$. Тогда $OS = OA = OC = R$, $OH = R \cdot \cos(\angle HOC)$ и для вычисления радиуса можно использовать соотношение

$$SH = R + OH = R + R\cos 2\alpha$$

Замечание 2.2. Если известны координаты четырех точек (x_k, y_k, z_k) $k = 1, 2, 3, 4$, лежащих на сфере, то радиус сферы R и координаты центра сферы $O\ (x_0, y_0, z_o)$ можно найти, решив систему уравнений $(x_k - x_0)^2 + (y_k - y_0)^2 + (z_k - z_0)^2 = R^2 \quad (k = 1, 2, 3, 4)$

Утверждение 5. (Необходимое и достаточное условие существования сферы, описанной около призмы)

Около призмы можно описать сферу тогда и только тогда, когда призма прямая и около ее основания можно описать окружность.

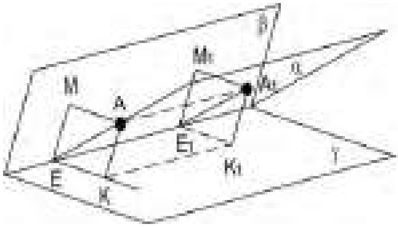
Доказательство. Пусть около призмы описана сфера. Тогда в сечении сферы плоскостью основания получится окружность, описанная около основания, а в сечении сферы боковыми гранями – параллелограммы, вписанные в окружности. Если параллелограмм вписан в окружность, то он является прямоугольником и, следовательно, все боковые ребра призмы перпендикулярны основанию.

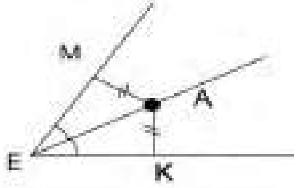
Обратно. Пусть P, P_1 – центры окружностей, описанных около оснований прямой призмы. Тогда отрезок PP_1 перпендикулярен основанию, а середина отрезка точка O равноудалена от всех вершин призмы и является центром описанного шара.

§ 3. Вписанные сферы

Утверждение 6. Если сфера касается двух пересекающихся плоскостей, то ее центр лежит на биссекторной плоскости двугранного угла, образованного этими плоскостями.

Доказательство. Пусть β, γ – заданные плоскости, $\beta \cap \; = l$ $\angle \; MEK \; = 2\varphi$ – линейный угол двугранного угла, α – биссекторная плоскость. Если $AM \perp \beta$, $AK \perp \gamma$ $AM = AK = R$, то центр сферы A равноудален от сторон линейного угла, лежит на биссектрисе линейного угла и, следовательно, лежит на биссекторной плоскости.





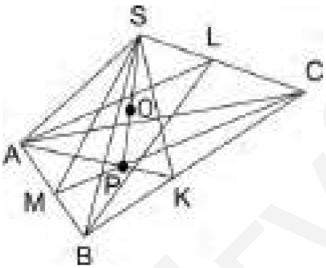
Расстояние от центра сферы до прямой l равно $EA = \dfrac{R}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}$, $KE = R \ ctg\dfrac{\varphi}{2}$.

Утверждение 7. Если сфера вписана в многогранник, то ее центр лежит на пересечении всех биссекторных плоскостей многогранника.

Утверждение 8. *(О существовании вписанной сферы)*

В произвольную треугольную пирамиду можно вписать сферу.

Доказательство. Пусть $SABC$ – треугольная пирамида, AKS, CMS – биссекторные плоскости двугранных углов с ребрами BC и AB, SP – прямая их пересечения. По свойству биссекторных плоскостей, всякая точка прямой SP равноудалена от боковых граней пирамиды.



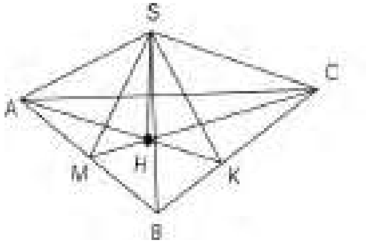
Биссекторная плоскость двугранного угла, образованного основанием и боковой гранью ASB пересекает прямую SP в точке O, равноудаленной уже от всех граней пирамиды.

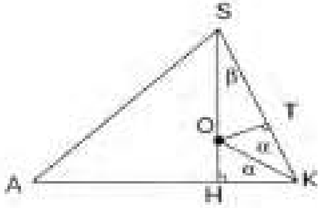
Точка O является центром сферы, вписанной в треугольную пирамиду $SABC$.

Вопрос: Почему биссекторная плоскость между основанием и боковым ребром не параллельна прямой SP и не содержит ее?

Утверждение 9. Центр сферы, вписанной в правильную треугольную пирамиду, лежит на высоте пирамиды.

Доказательство. Пусть M, K – середины ребер AB, BC. Тогда плоскости ASK, CSM являются биссекторными плоскостями для двугранных углов, пересекающихся по ребрам AS, CS, и высота SH является пересечением этих плоскостей.





Так как в треугольнике ASK $OH = OT = R$ и OK – биссектриса угла ASK, то $OH = HK\ tg\,\alpha$, $SH = R + OS$, $OS = R + \dfrac{R}{\sin\ \beta}$.

Следовательно, радиус вписанного шара можно найти из соотношения

$$R = HK\cdot\ tg\,\alpha,\ SH = R + \frac{R}{\sin\ \beta}$$

Замечание 3.1. Для нахождения радиуса вписанной окружности можно воспользоваться также свойством биссектрисы $SO : OH = SK : HK$, $OH = R$, $SO + R = SH$.

Замечание 3.2. В правильной треугольной пирамиде вычислить углы α, β или высоту достаточно просто.

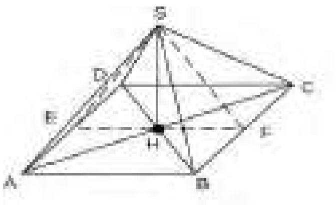
Следствие 4.2. Радиус шара, вписанного в правильный тетраэдр с ребром a, равен $\dfrac{a\ \sqrt{6}}{12}$.

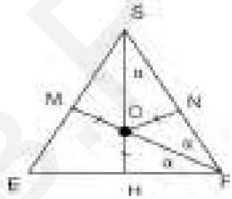
Действительно, $SK = \dfrac{a\ \sqrt{3}}{2}$, $HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

По свойству биссектрисы KO: $\dfrac{SO}{OH} = \dfrac{SK}{HK} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow R = \dfrac{1}{4}\ SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.

Утверждение 10. Центр сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, лежит на высоте пирамиды.

Доказательство. Плоскости ASC, DSB являются биссекторными плоскостями для двугранных углов, пересекающихся по ребрам AS, DS, а высота SH является прямой пересечения этих плоскостей. Если E, F – середины ребер AD, BC, то плоскость ESF проходит через центр шара, а шар касается граней ASD, BSC по прямым ES, FS. Тогда, $OM = ON = OH = R$ и O – центр окружности, вписанной в треугольник ESF.





Следовательно, радиус вписанного шара можно найти из соотношения

$$R = HF \cdot tg\frac{\alpha}{2}$$

Замечание 3.3. Радиус окружности, вписанной в треугольник ESF, можно также найти из формулы площади треугольника $S_{ESF} = p \cdot R$, где p – периметр треугольника.

Замечание 3.4. Для нахождения радиуса можно также воспользоваться свойством биссектрисы FO.

$$SO : R = SF : HF, \ R + SO = SH.$$

Замечание 3.5. Треугольник ESF является равнобедренным, поэтому вычислить величину угла α, периметр или площадь треугольник ESF достаточно просто.

Утверждение 11. Если все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним углом, то точка пересечения высоты пирамиды с биссектрисой угла, образованного апофемой и ее проекцией на плоскость основания, является центром вписанного шара.

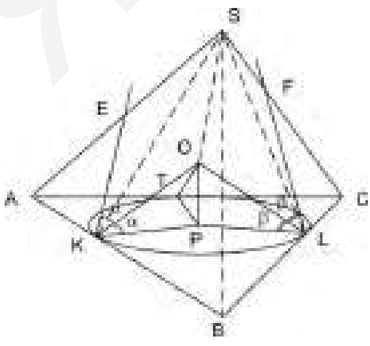
Доказательство. Легко доказать, что указанная точка равноудалена от всех граней пирамиды.

Утверждение 12. Если шар, вписанный в треугольную пирамиду, касается плоскости основания в центре вписанной в основание окружности, то все двугранные углы между боковыми гранями и основанием равны и центр шара лежит на высоте пирамиды.

Доказательство. Рассмотрим треугольную пирамиду $SABC$ с вершиной S и основанием ABC. Пусть шар радиуса R с центром в точке O касается плоскости основания в точке P, а окружность радиуса m с центром в точке P касается ребер AB, BC, CA в точках K, L, T : $PK = PL = PT = m$.

В плоскости ASB проведем отрезок KE перпендикулярно AB, а в плоскости BSC – отрезок LF перпендикулярно BC.

Тогда углы EKO, FLO являются линейными углами соответствующих двугранных углов, а OK, OL – биссектрисы этих углов.



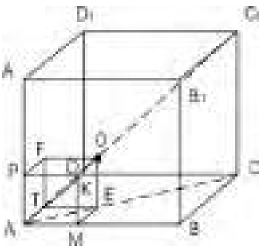
Так как $tg\ \alpha = \dfrac{OP}{KP} = \dfrac{R}{m} = \dfrac{OP}{PL} = tg\,\beta$, то двугранные углы равны $\angle\ EKP = 2\alpha = 2\beta = \angle\ FLP$

Далее, если все грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним углом, то вершина пирамиды проектируется в точку P – центр окружности, вписанной в основание.

Из условий $SP \perp \Delta\ ABC$, $OP \perp \Delta\ ABC$ следует, что точка O лежит на высоте пирамиды SP.

Замечание 3.6. Из доказанного утверждения следует, что, в действительности, точки E и F совпадают с точкой S.

Утверждение 13. Пусть сфера радиуса R касается граней трехгранного угла A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Тогда центр сферы лежит на диагонали куба и является вершиной куба с ребром R, встроенного в трехгранный угол A.



Доказательство. Действительно, радиусы OF, OE, OK, проведенные из центра O в точки касания, перпендикулярны граням куба.

Тогда $AMETPKOF$ – куб с ребром R и вершина куба лежит на диагонали AO а, следовательно, на диагонали AC_1.

Утверждение 14. В прямую призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда в основание призмы можно вписать окружность, диаметр которой равен высоте призмы.

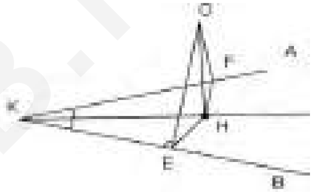
Необходимость. Пусть в призму можно вписать сферу. Так как радиус, проведенный в точку касания сферы и плоскости перпендикулярен плоскости, то высота призмы равна диаметру сферы. Далее, проведем плоскость через центр вписанной сферы параллельно основанию. Призма прямая, следовательно, в сечении призмы этой плоскостью получится многоугольник, равный основанию, с вписанной в него окружностью нужного радиуса.

Достаточность. Так как призма прямая, а в основание ее можно вписать окружность, радиус R которой равен половине высоты призмы, то отрезок длины $2R$ соединяющий центры окружностей, перпендикулярен основанию. Тогда сфера радиуса R с центром на середине этого отрезка касается всех боковых граней призмы и оснований.

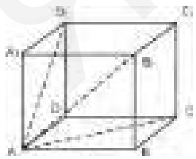
§ 4. Сфера касается двух лучей, выходящих из одной точки

Утверждение 15. Пусть сфера касается двух лучей KA, KB, выходящих из точки K. Тогда центр сферы лежит на плоскости α, проходящей через биссектрису угла AKB перпендикулярно плоскости этого угла.

Доказательство. Пусть O – центр сферы, E, F – точки касания шара и лучей. Из условия касания следует, что $OE \perp KB$, $OF \perp KA$, $OE = OF = R$. Опустим перпендикуляр OH на плоскость угла AKB. По теореме о трех перпендикулярах $HE \perp KB$, $HF \perp KA$.



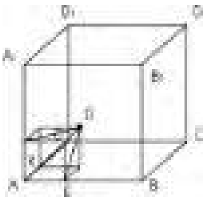
Прямоугольные треугольники равны и, следовательно, $HE = HF$. Таким образом, точка H равноудалена от сторон угла, а точка O лежит на плоскости, проходящей через биссектрису угла AKB перпендикулярно плоскости этого угла.



Замечание 4.1. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Тогда $AD_1 \perp D_1C_1$, $AC \perp CC_1$, $AB_1 \perp B_1C_1$.

Утверждение 16. Пусть шар радиуса R касается ребер трехгранного угла A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Тогда центр шара лежит на диагонали AC_1 куба и является вершиной куба с ребром $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$, встроенного в трехгранный угол A.

Доказательство. Пусть O – центр шара. Тогда $AD_1 \perp D_1C_1$, $AC \perp CC_1$, $AB_1 \perp B_1C_1$, $OF = OE = OK = R$.



Построим новый куб, диагоналями граней которого являются OF, OE, OK. Ребро построенного куба равно $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$, а точки A, O, C_1 лежат на диагонали куба AC_1.

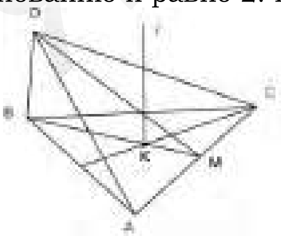
§ 5. Приложение

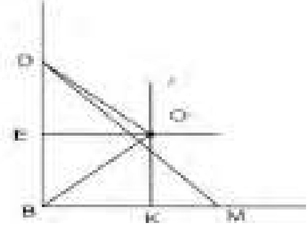
Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих различные случаи взаимного расположения шара (сферы) с другими геометрическими объектами.

Решение каждого примера будем начинать с нахождения (построения) точки центра шара (сферы) на основе анализа условий и применения доказанных выше утверждений.

Полученную на первом этапе информацию будем использовать для вычисления требуемых линейных величин.

Пример 1. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной 3, одно из боковых ребер перпендикулярно основанию и равно 2. Найдите радиус описанного шара.





Построение. Точки A, B, C лежат на сфере, следовательно, центр сферы O лежит на перпендикуляре l, проведенном через центр треугольника ABC перпендиклярно плоскости этого треугольника.
Точки B, D лежат на сфере. Следовательно, центр сферы – это точка пересечения серединной перпендикулярной плоскости отрезка BD и прямой l.

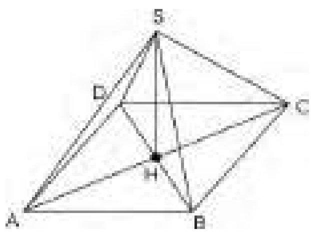
Вычисления. Рассмотрим сечение BDM, $DE = EB$. Тогда $OD = OB = R$,

$$BM = \frac{3\sqrt{3}}{2},\quad BK = \frac{2}{3}BM = \sqrt{3},\quad BE = ED = 1,\quad BO = \sqrt{3+1} = 2.$$

Ответ: $R = 2$.

Пример 2. Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом α между диагоналями, а все боковые ребра образуют с плоскостью основания угол φ. Найдите расстояние от центра описанного шара до основания, если радиус шара равен R.

Построение. Так как все боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним углом, то основание высоты попадает в точку пересечения диагоналей прямоугольника, $SA = SB = SC = SD$ и любая точка высоты равноудалена от точек A, B, C, D. Таким образом, центр шара O лежит на высоте.

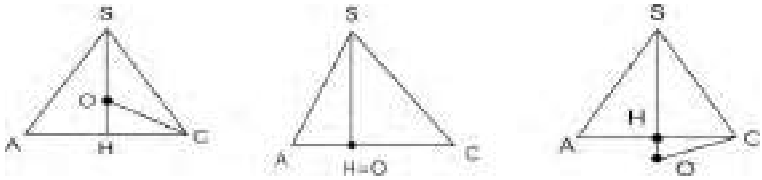


Вычисления. Рассмотрим сечение ACS. Вычислим угол HCO. $OS = OC = R$, $OH = R \cdot \cos(\angle HOC)$,

$\angle HCS = \varphi$, $\angle HSC = 90° - \varphi$,

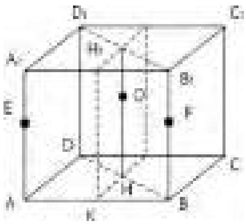
$\angle HOC = 180° - 2\varphi$.

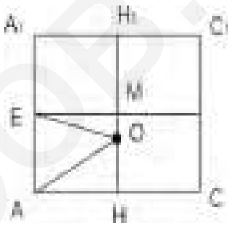
Следовательно, $OH = R\cos(180° - 2\varphi) = -R\cos 2\varphi$.



Замечание.
Если $\varphi > 45°$, то $\cos 2\varphi < 0 \Rightarrow$ точка O лежит выше AC;
если $\varphi = 45°$, то $\cos 2\varphi = 0 \Rightarrow$ точка O лежит на AC;
если $\varphi < 45°$, то $\cos 2\varphi > 0 \Rightarrow$ точка O лежит ниже AC.

Пример 3. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите радиус сферы, проходящей через середины ребер AA_1, BB_1 и вершины A, C.





Построение. Пусть E, F, K – середины ребер AA_1, BB_1, AB. Сфера проходит через точки E, F $\Rightarrow$ центр сферы лежит на серединной перпендикулярной плоскости, проходящей через точку K. Сфера проходит через точки A, C $\Rightarrow$ центр сферы лежит на серединной перпендикулярной плоскости DBB_1D_1. Следовательно, центр сферы лежит на пересечении плоскостей α и DBB_1D_1.

Вычисления. Рассмотрим сечение ACC_1A_1.

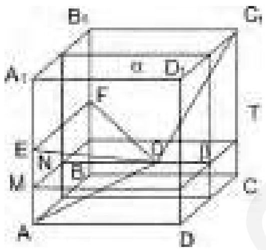
$$OE = OA = R, \quad AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$EO^2 = EM^2 + MO^2$, $AO^2 = AH^2 + OH^2$. Так как $EM = AH$, $EO = AO$, то $OM = OH = \dfrac{a}{4}$.

Тогда $R = \sqrt{\dfrac{a^2}{16} + \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{3\ a}{4}$.

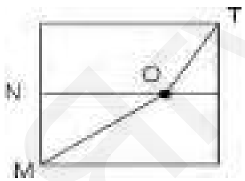
Пример 4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром α Найдите радиус сферы, проходящей через середины ребер AA_1, BB_1 и вершины A, C_1.

<u>**Построение**</u>**.** Пусть α – серединная перпендикулярная плоскость отрезка AB, E, F – середины ребер AA_1, BB_1. Как и в предыдущей задаче центр сферы лежит на плоскости α



Точки E, A лежат на сфере, следовательно, центр сферы лежит на серединной перпендикулярной плоскости β проходящей через середину AE – точку M.

Таким образом, центр сферы лежит на пересечении плоскостей α и β – прямой NO.



<u>**Вычисления**</u>**.**

$$OE = OA = OC_1 = R,\quad ME = \frac{a}{4},\quad C_1T = \frac{3a}{4}.$$

Рассмотрим сечение куба плоскостью β

Пусть $OH = x$.

Тогда

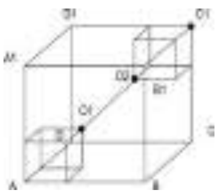
$$OC_1^2 = OT^2 + TC_1^2,\ EO^2 = EM^2 + MO^2,\ MH = H_1T = \frac{a}{2},$$

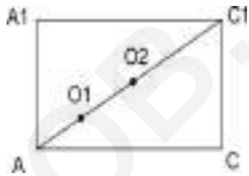
$OT^2 = (a-x)^2 + \dfrac{a^2}{4}$, $MO^2 = x^2 + \dfrac{a^2}{4}$. Приравняем эти выражения и найдем $x = \dfrac{3a}{4}$, $R^2 = \dfrac{14a^2}{16}$. Ответ: $R = \dfrac{\sqrt{14}\,a}{4}$.

Пример 5. В угол A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $1{,}5$ вписан шар радиуса $0{,}5$. Найдите радиус шара, вписанного в трехгранный угол с вершиной C_1 и касающегося первого шара.

<u>Построение</u>. Из утверждения 8 следует, что центры шаров O_1, O_2 являются вершинами кубов с радиусами $0{,}5$ и R и лежат на диагонали AC_1.

<u>Вычисления</u>. Рассмотрим сечение ACC_1A_1. $AC_1 = AO_1 + O_1O_2 + O_2C_1$, где AC_1, AO_1, O_2C_1 – диагонали





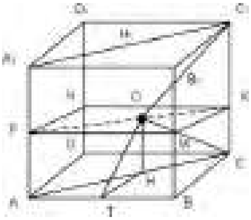
трех кубов. $AO_1 = \sqrt{3}\cdot 0{,}5$, $O_2C_1 = \sqrt{3}\ R$, $AC_1\sqrt{3}\cdot 1{,}5$, а из условия касания $O_1O_2 = 0{,}5 + R$.

Теперь, $\sqrt{3}\cdot 1{,}5 = \sqrt{3}\cdot 0{,}5 + 0{,}5 + R + \sqrt{3}\ R$

Ответ: $R = \dfrac{2\sqrt{3}-1}{2(\sqrt{3}+1)}$.

Пример 6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром 1. Найдите радиус шара, проходящего через вершины C, C_1 и касающегося прямых AB, AD.

<u>Построение.</u> Шар проходит через вершины C, C_1 $\Rightarrow$ центр шара лежит на серединной перпендикулярной плоскости



$PMKN$, где P, M, K, N – середины ребер. Далее, шар касается AB, AD $\Rightarrow$ центр шара лежит на плоскости ACC_1A_1. Следовательно, центр шара лежит на пересечении указанных плоскостей – прямой PK.

Если O – центр шара, то $OH \perp AC$, $HT \perp AB$, $OT = OC = OC_1 = R$.

Вычисления. Пусть $OK = x$. Тогда $R^2 = OC^2 = x^2 + \frac{1}{4}$,

$PO = AH = \sqrt{2} - x$, $HT = \frac{AH}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - x}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{2}}$.

В результате получаем уравнение $x^2 + \frac{1}{4} = $

$= R^2 = (1 - \frac{x}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$.

Наконец, $R^2 = \frac{6 + 4\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7 + 4\sqrt{2}}{4}$.

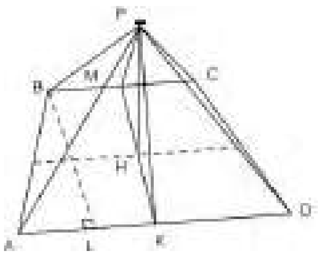
Ответ: $R = \frac{\sqrt{7 + 4\sqrt{2}}}{2}$.

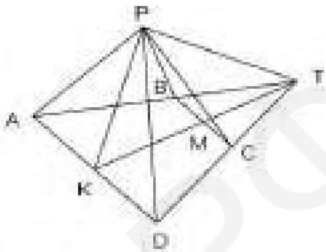
Пример 7. Основание пирамиды $PABCD$ – равнобедренная трапеция с боковыми сторонами $AB = CD = b$ и острым углом A, равным α Боковые грани APD, BPC – равнобедренные треугольники $(BP = PC,\ AP = PD)$, образующие с основанием угол φ. Известно, что в пирамиду можно вписать шар. Найдите радиус этого шара.

Построение. Пусть K, M – середины AD и BC.
Из условий $AP = PD \Rightarrow PK \perp AD$, $BP = PC \Rightarrow PM \perp BC$.

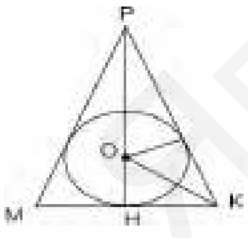
Отсюда следует, что $MK \perp AD$,

$MK \perp BC$, $\angle KMP = \angle MKP = \varphi$. Следовательно, высота PH является биссектрисой угла MPK. Значит, биссекторная плоскость между боковыми гранями APD, BPC проходит через высоту PH.





Докажем, что биссекторная плоскость между гранями APB, DPC также проходит через высоту PH. Продолжим боковые стороны AB, DC трапеции до пересечения в точке T. Тогда, $AT = TD$ и TK является биссектрисой и высотой треугольника ATD. Плоскость KPT перпендикулярна плоскости ATD $\Rightarrow$ плоскость KPT является биссекторной плоскостью для граней APT, DPT, а плоскости APD, BPC перпендикулярны плоскости KPM. Таким образом, центр шара лежит на высоте и радиус R окружности, вписанной в треугольник MPK, равен радиусу шара.



Вычисления. Вычислим радиус окружности, вписанной в треугольник MPK.

$$HK = \frac{b\sin\alpha}{2}, \quad R = OH = HK \cdot tg\frac{\varphi}{2}.$$

$$MK = b \sin \alpha, \ \angle M = \angle K = \varphi, \ \angle HKO = \frac{\varphi}{2},$$

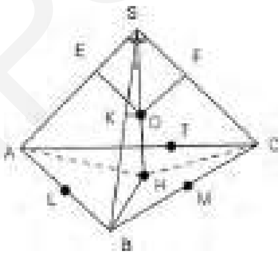
Ответ: $R = \dfrac{b \sin\alpha}{2} \cdot tg\dfrac{\varphi}{2}$.

Пример 8. Шар касается всех ребер треугольной пирамиды, центр шара лежит на высоте. Докажите, что пирамида правильная.

Доказательство. Пусть SH – высота пирамиды, E, F, K – точки касания сферы с боковыми ребрами. Тогда $OE \perp SA$, $OF \perp SC$, $OK \perp SB$,

$OE = OF = OK = R$, $\Delta OES = \Delta\ OFS = \Delta\ OKS$. Отсюда следует, что $HA = HB = HC$, $SA = SB = SC$. Отрезки касательных равны $\Rightarrow$ $SE = SF = SK$ $\Rightarrow$ $AE = CF = BK = SA - SE$.

Обозначим через L, M, T – точки касания шара с ребрами основания ABC.



Тогда

$AL = AT = AE = FC = TC = CM = BM =$

$= BL = BK$.

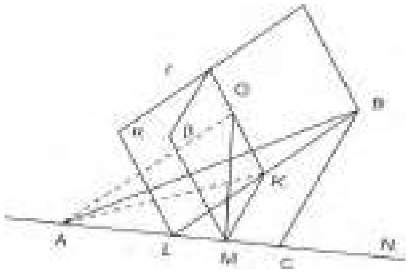
Следовательно, у пирамиды $SABC$ все боковые ребра равны и стороны основания между собой равны.

Таким образом, доказано, что пирамида правильная.

Пример 9. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 4$, $BC = 3$. Точка N лежит на луче AC, $AN = 6$. Шар радиуса 4 касается лучей BA, BC, его центр равноудален от точек A и N. Найдите расстояние от центра шара до точки A.

Построение. Пусть BL – биссектриса угла ABC, M – середина отрезка AN. Шар касается лучей BA и BC $\Rightarrow$ центр шара лежит в плоскости α проходящей через биссектрису BL перпендикулярно плоскости ABC. Центр шара равноудален от точек A, N $\Rightarrow$ центр шара лежит на серединной перпендикулярной плоскости β проходящей через точку M.

Если точка K – пересечение биссектрисы LB и перпендикуляра MK, то центр шара лежит на пересечении плоскостей α и β Прямая $l = \alpha \cap \beta$ проходит через точку K перпендикулярно плоскости ABC. Расстояние от точки O до луча BC равно R.



Вычисления. По свойству биссектрисы, $\dfrac{AL}{LC} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow LC = \dfrac{3}{2}$. Далее, $AM = \dfrac{1}{2}\ AN = 3 \Rightarrow$ $LM = LC - MC = \dfrac{1}{2}$. Из подобия треугольников LKM и LBC следует, что $\dfrac{KM}{BC} = \dfrac{LM}{LC} \Rightarrow KM = \dfrac{BC \cdot LM}{LC} = 1.$

Так как $MC = KM = 1$, то по теореме Пифагора

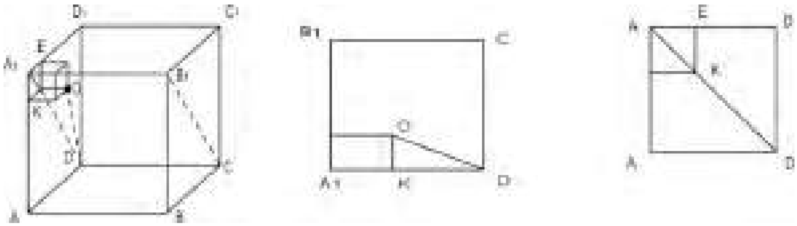
$OM = R = 4$. Теперь,

$OK^2 = OM^2 - MK^2 = 15,\ AK^2 = AM^2 + MK^2 = 10,$

$AO^2 = AK^2 + OK^2 = 25.$ Ответ: $AO = 5$.

Пример 10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром 1. Два шара одинакового радиуса касаются друг друга. Один – с центром в точке D, другой – касается трехгранного угла с вершиной A_1. Найдите радиусы шаров.

Построение. Шар вписан в угол $A_1 \Rightarrow$ центр шара O является вершиной куба с ребром R, построенного в вершине A_1. Шары касаются $\Rightarrow OD = 2R$.



Вычисления. Рассмотрим грань ADD_1A_1 и диагональное сечение A_1DCB_1. Имеем $A_1K = \sqrt{2}\ R,\ KE = R,\ A_1D = \sqrt{2},$ $KD = \sqrt{2} - A_1D = \sqrt{2} - \sqrt{2}\ R.$

$OD^2 = OK^2 + KD^2 \Rightarrow 4R^2 = R^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{2}\ R)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 + 4R - 2 = 0.$ Ответ: $R = -2 + \sqrt{6}.$

Пример 11. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6, высота пирамиды равна 4. Точки K, L расположены на ребрах AD, SC так, что $AK : KD = SL : LC = 1 : 2$. Шар касается плоскостей ASB, CSD и его центр лежит на прямой KL. Найдите радиус шара.

Построение. Шар касается плоскостей $ASB, CSD \Rightarrow$ его центр лежит на биссекторной плоскости ESF, где E, F – середины AD, BC. Кроме того, по условию задачи, центр шара лежит на KL. Следовательно, центр шара лежит на пересечении прямой KL и плоскости EFS.

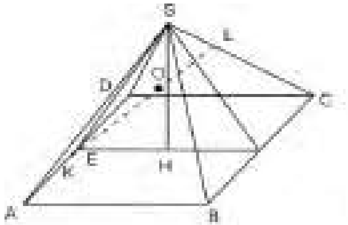
Вычисления. Найдем точку пересечения прямой и плоскости «методом координат». Выберем оси координат как показано на рисунке. Тогда $K = (0;\ -3;\ 1),\ L = (\frac{8}{3};\ 1;\ -1),$

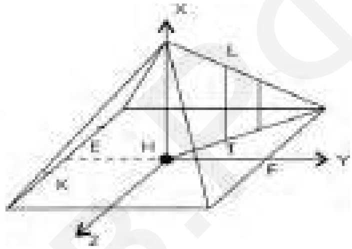
$\overline{KL} = (\frac{8}{3};\ 4;\ -2)$. Запишем уравнение прямой, проходящей через точку K параллельно KL

$$(x;\ y;\ z) = (0; -3; 1) + t \cdot (\frac{8}{3}; 4; -2) = (\frac{8}{3}t; -3 + 4t; 1 - 2t).$$

Плоскость ESF проходит через оси OX, OY и задается уравнением $z = 0$.

Точку пересечения прямой KL и плоскости $z = 0$ найдем из условия $z = 1 - 2t = 0 \Rightarrow t = 0{,}5 \Rightarrow$ координаты центра сферы $O\left(\frac{4}{3}; -1; 0\right)$. Радиус шара – это расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через точки $S(4; 0; 0)$, $B(0; 3; 3)$, $A(0; -3; 3)$.





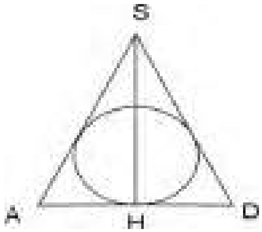
Эта плоскость задается уравнением $3x + 4z - 12 = 0$, а расстояние от точки O до плоскости вычисляется по формуле

$$R = d = \frac{\left|3 \cdot \frac{4}{3} - 12\right|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{8}{5}.$$

Пример 12. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 3$, высота пирамиды равна 4 и проходит через середину AD. Найдите AD, если известно, что в пирамиду можно вписать шар.

<u>Построение</u>. Пусть K – середина ребра BC. Имеем $AH = HD, SH \perp AD \Rightarrow SA = SD$, $SB = SC$. Угол ASD является линейным углом двугранного угла между гранями ASB, DSC, а плоскость SHK является биссекторной плоскостью этого угла. Далее, плоскость SHK перпендикулярна плоскостям $ABCD$, SBC $\Rightarrow$ в сечении шара плоскостью SHK получится круг радиуса R, вписанный в треугольник SHK. $SH = 4$, $HK = AB = 3 \Rightarrow R = 1$.

Вычисления. Рассмотрим проекцию шара на плоскость ASD. Так как плоскость ASD перпендикулярна плоскостям BAS, CDS, то проекцией шара на плоскость ASD будет круг радиуса $R = 1$, вписанный в треугольник ASD. Пусть $AD = x$. Тогда



$$SD = \sqrt{16 + \frac{x^2}{4}}.$$

Значение x можно Найдите из выражения площади треугольника ADS: $S_{ADS} = p \cdot R$. Отсюда получаем,

$$S = \frac{1}{2} x \cdot 4, \quad p = \frac{AD + 2DS}{2} = \frac{x + 2\sqrt{16 + \frac{x^2}{4}}}{2}.$$

$$4x = (x + 2\sqrt{16 + \frac{x^2}{4}}) \cdot 1 = x + \sqrt{64 + x^2},$$

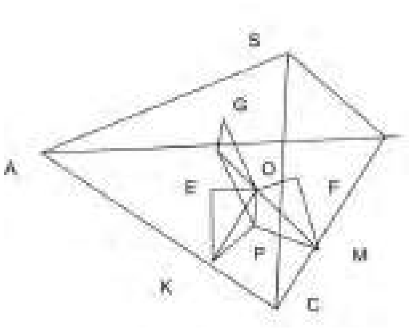
$$3x = \sqrt{64 + x^2}, \; 9x^2 = 64 + x^2, \; x = 2\sqrt{2}.$$

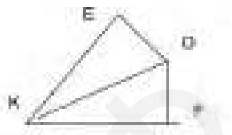
Ответ: $AD = 2\sqrt{2}$.

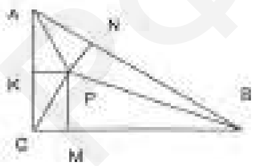
Пример 13. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой b. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углами α, β, γ. Найдите радиус вписанного шара.

Построение. Пусть O – центр шара, P, E, F, G – точки касания шара с основанием и боковыми гранями. Тогда: $OP = OE = OF = OG$ – радиусы, перпендикулярные граням; OK, OM, ON – биссектрисы двугранных углов; $PK \perp AC$, $PM \perp CB$, $PN \perp AB$.

Вычисления. Рассмотрим двугранный угол EKP и основание ABC. Если $\angle EKP = \alpha$, $\angle FMP = \beta$, $\angle GNP = \gamma$, то $KP = R ctg \dfrac{\alpha}{2}$, $PM = R ctg \dfrac{\beta}{2}$, $PN = R ctg \dfrac{\gamma}{2}$.







Вычислим площадь треугольника ABC как сумму площадей треугольников APC, CPB, BPA. $S_{ABC} = S_{APC} + S_{APB} + S_{CPB} =$

$$= \frac{1}{2}\,(KP \cdot AC + PM \cdot CB + PN \cdot AB) =$$

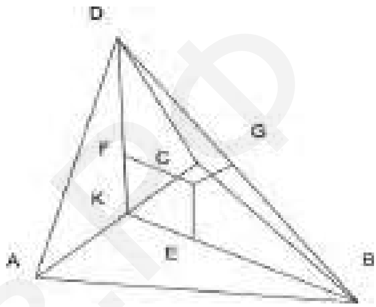
$$= \frac{1}{2}\,\left(AC \cdot R\ ctg \frac{\alpha}{2} + CB \cdot R\ ctg \frac{\beta}{2} + AB \cdot R\ ctg \frac{\gamma}{2}\right).$$ Так как $AC = CB = \dfrac{b}{\sqrt{2}}$, то получаем соотношение

$$\frac{1}{2}\,\frac{b^2}{2} = \frac{1}{2}\,b\,R\,\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,ctg\,\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,ctg\,\frac{\beta}{2} + ctg\,\frac{\gamma}{2}\right).$$

Ответ: $R = \dfrac{b}{\sqrt{2}\,\left(ctg\,\dfrac{\alpha}{2} + ctg\,\dfrac{\beta}{2} + \sqrt{2}\,ctg\,\dfrac{\gamma}{2}\right)}$.

Замечание 5.1. Полученное выше выражение площади основания через двугранные углы и радиус вписанного шара сводит вычисление радиуса вписанного шара к планиметрической задаче и может эффективно использоваться при решении широкого круга задач.

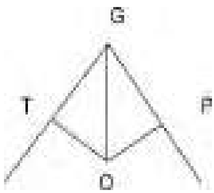
Пример 14. Грани ACD и ACB треугольной пирамиды $ABCD$ – равносторонние треугольники со стороной a, перпендикулярные друг другу. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.



<u>Построение</u>. Обозначим через K середину ребра AB. Так как CK и DK биссектрисы соответствующих углов, то плоскость CKD является биссекторной плоскостью двугранного угла с ребром DC и, следовательно, центр вписанного шара O лежит в этой плоскости.

Пусть E, F, T, P – точки касания шара с гранями ABC, ADC, ADB, CDB. Тогда $OF \perp ADC$, $OE \perp ABC$, $OT \perp ADB$, $OP \perp BDC$.

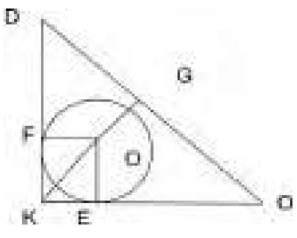
DK и KB перпендикулярны ребру AC, поэтому точки касания E, F лежат на DK и KB, а $\angle\ TGP$ является линейным углом двугранного угла 2φ с ребром DB, $OT = OP = R, OG = \dfrac{R}{\sin\ \varphi}$.



Рассмотрим сечение шара плоскостью CKD. Окружность радиуса R касается катетов треугольника KDC.

<u>Вычисления.</u> $KD = KB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$R + OG = KG = \frac{DB}{2} = \frac{a\ \sqrt{6}}{4}$$



Отсюда, $R\left(1+\frac{1}{\sin\varphi}\right)=\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Угол φ найдем из равнобедренного треугольника AGC:

$$DB=\frac{a\sqrt{6}}{2},\quad AG=BG=\frac{a\sqrt{10}}{4},$$

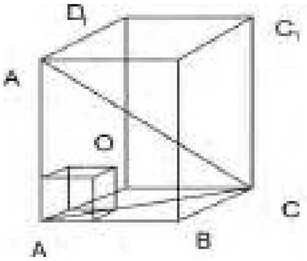
$$\sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{10}}.$$

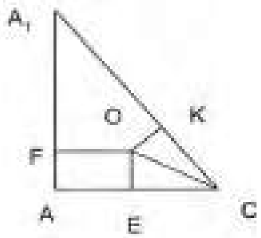
Ответ: $R=\frac{a\sqrt{6}\,(\sqrt{10}-2)}{12}$.

> *Замечание 5.2.* В данной задаче условие «треугольники ABC, ADC правильные» можно заменить на более слабое – например, оба треугольника равнобедренные. Тогда для вычисления искомого радиуса можно использовать прием из предыдущего примера – вычислить площадь треугольника KDB как суммы площадей треугольников KOD, DOB, BOK
>
> $$S_{KDB}=\frac{1}{2}(KD\cdot R+KB\cdot R+DB\cdot OG),\quad OG=\frac{R}{\sin\varphi}.$$

Пример 15. Квадрат $ABCD$ со стороной 1 является основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, боковое ребро которого равно 4. Сфера, центр которой лежит внутри параллелепипеда, касается граней $ABCD$, AA_1B_1B, AA_1D_1D и прямой A_1C. Найдите радиус сферы.

Построение. Так как сфера касается граней трехгранного угла с вершиной A и прямой A_1C, то центр сферы O является вершиной куба со стороной R, вписанной в этот трехгранный угол, а расстояние от точки O до прямой A_1C равно R.





Вычисления. Рассмотрим сечение куба плоскостью AA_1C: $OE = OK = R,\ OF = \sqrt{2}\ R,\ AA_1 = 4,\ AC = \sqrt{2},\ A_1C = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$

$$S_{KDB} = 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}(AC \cdot R + A_1C \cdot R + \sqrt{2}\ R \cdot AA_1) =$$

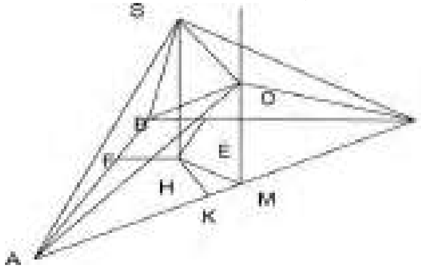
$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2}R + 3\sqrt{2}\ R + 4\sqrt{2}\ R) = 4\sqrt{2}R.$$ Ответ: $R = \frac{1}{2}$.

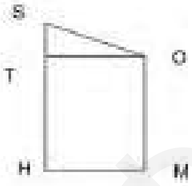
Пример 16. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 6, 8, 9 все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом. Найдите высоту пирамиды, если радиус описанной около пирамиды сферы равен 7.

Построение. Так как все грани пирамиды $SABC$ наклонены к плоскости основания под одним углом, то основание высоты точка H является центром окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABC $(HF = HE = HK = r)$. Центр O сферы, описанной около пирамиды, равноудален от вершин прямоугольного треугольника ABC и, следовательно, лежит на прямой l, проходящей через середину гипотенузы точку M перпендикулярно плоскости основания ABC $(OA = OC = OB = OS = R)$. Прямые SH и l параллельны.

Вычисления. Пусть $AB = 6,\ BC = 8,\ AC = 10.$ Радиус r вписанной в треугольник ABC окружности равен 2, $AF = AK = 4,\ CE = CF = 6,\ KM = 1.$ Рассмотрим прямоугольную трапецию $HSOM$ $(SH \parallel OM)$. По теореме Пифагора $HM^2 = 5,\ OM^2 = 24,\ SO^2 = (h - TH)^2 + HM^2,$

$49 = (h - \sqrt{24})^2 + 5$. Отсюда $h = \sqrt{44} \pm \sqrt{24}$. Условию задачи удовлетворяют оба значения, так как точка T может располагаться как выше, так и ниже точки S.





Ответ: $h = \sqrt{44} \pm \sqrt{24}$.

Пример 17. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Точка Q – центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки B, D, C_1, Q.

<u>Вычисления</u>. Решим задачу «методом координат». Расположим начало координат в вершине D куба, а оси OX, OY, OZ направим соответственно по ребрам DC, DD_1, DA. Вычислим координаты точек B (1; 0; 1), D (0; 0; 0), C_1 (1 ; 1; 0), Q $(\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{1}{2})$.

Подставим координаты данных точек и координаты центра сферы O (a, b, c) в уравнение сферы в пространстве (*Замечание 2.2*):

$$\begin{cases} (1-a)^2 + (1-b)^2 + c^2 = R^2; \\ a^2 + b^2 + c^2 = R^2; \\ (1-a)^2 + b^2 + (1-c)^2 = R^2; \\ (0,5 - a)^2 + (1-b)^2 + (0,5 - c)^2 = R^2. \end{cases}$$

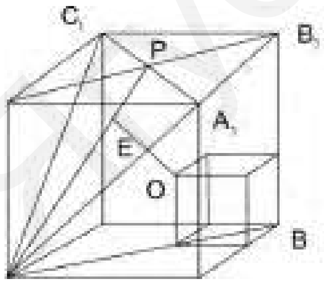
Раскроем скобки и, вычитая второе уравнение из остальных, получим соотношения: $1 = a + b$, $1 = a+c$, $1{,}5 = a + 2b + c$.

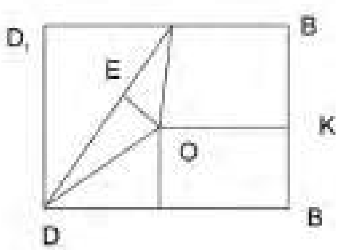
Отсюда $a = c = \dfrac{3}{4}$, $b = \dfrac{1}{4}$, $R^2 = \dfrac{11}{16}$. Ответ: $R = \dfrac{\sqrt{11}}{4}$.

Пример 18. Ребро куба равно 1. Найдите радиус сферы, касающейся ребер BA, BB_1, BC и плоскости A_1DC_1.

<u>Построение</u>. Так как сфера касается ребер трехгранного угла с вершиной B, то центр сферы O является вершиной куба с диагональю R, вписанного в этот трехгранный угол. Ребро этого куба $a = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$, расстояние OE от вершины O до плоскости DA_1C_1 также равно R. Точки D, B, O, P лежат в одной плоскости DD_1B_1B, поэтому основание перпендикуляра OE лежит на DP.

<u>Вычисления</u>. Рассмотрим сечение куба плоскостью DD_1B_1B.





$D_1P = PB_1$, $OE \perp DP$, $OE = R$, $OK \parallel DB$, $DB = \sqrt{2}$, $DP = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $OK = R\sqrt{2}$.

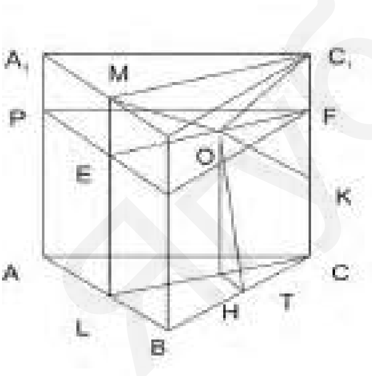
Радиус сферы найдем из выражения площади треугольника ODP.

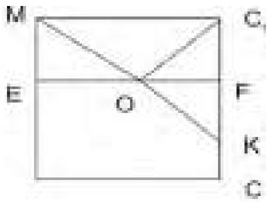
$S_{ODP} = \frac{1}{2} DP \cdot R = S_{DD_1BB1} - S_{DD_1P} - S_{DOKB} - S_{OPB_1B}$. Отсюда $\frac{1}{2} R \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = 1 \cdot \sqrt{2} - \frac{R + \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} - \frac{R + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \cdot \left(1 - \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$.

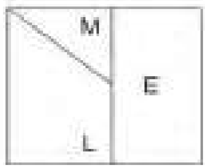
Ответ: $R = \dfrac{2\sqrt{2}}{3 + \sqrt{6}}$.

Пример 20. Сфера пересекает ребро CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в точках C_1 и K $(C_1K = 4)$ и касается всех ребер ломаной $BCAA_1B_1$. Найдите радиус сферы и объем призмы.

<u>Построение</u>. Пусть точки L, M, F – середины AD, A_1D_1, KC_1, точка E лежит на LM $(EM = FC_1 = 2)$. Проанализируем условие задачи.







Во-первых, точки K, C_1 лежат на сфере $\Rightarrow$ центр сферы O лежит в плоскости PFQ ($PA_1 = QB_1 = FC_1$).

Во-вторых, сфера касается ребер CA, $CB \Rightarrow O$ лежит на плоскости LMC_1C. Так как выполняются оба этих условия, то центр сферы будет лежать на пересечении данных плоскостей прямой EF.

В-третьих, сфера касается ребер AA_1, A_1B_1 $\Rightarrow O$ лежит на плоскости, проходящей через биссектрису угла AA_1B_1. Однако известно, что центр O лежит на прямой EF, значит A_1E – биссектриса, а указанная плоскость проходит через прямую EF. Тогда $ME = A_1M = MB_1 = 2$ и ABC – правильный треугольник со стороной 4.

Пусть $OH \perp CL$, $HT \perp BC$. Сфера касается ребра A_1B_1 в точке M, ребра BC в точке T, $OT = OC_1 = OM = R$.

<u>Вычисления</u>. Треугольник MOC_1 – равнобедренный, поэтому O – середина EF, а H – середина LC, $EO = OF = = \frac{1}{2} MC_1 = \sqrt{3}$, $CL = EF = MC_1 = 2\sqrt{3}$. Далее, $R^2 = OM^2 = OE^2 + EM^2 = 7$, $R = \sqrt{7}$,

$$EL^2 = OH^2 = R^2 - \frac{3}{4} = \frac{25}{4}.$$

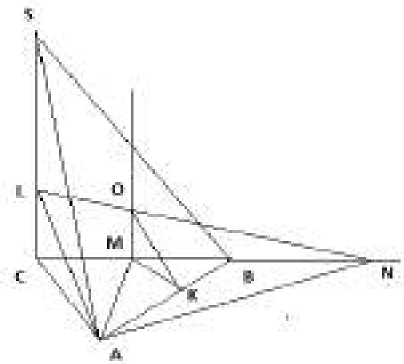
Наконец, $AA_1 = EL + 2 = \frac{9}{2}$, $V = \frac{1}{3} \cdot 16\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9}{2} = 18\sqrt{3}$.

Ответ: $R = \sqrt{7}$, $V = 18\sqrt{3}$.

Пример 21. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 5. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и равно 12. Сфера с центром O на плоскости SBC касается ребер SA, AC, AB. Найдите радиус сферы.

<u>Построение</u>. Если сфера касается ребер AC и AB, то центр сферы лежит в плоскости α, проходящей через биссектрису (медиану) AM правильного треугольника ABC перпендикулярно плоскости треугольника ABC. Если сфера касается ребер AC и AS, то центр сферы лежит в плоскости β, проходящей через биссектрису AL прямоугольного треугольника ACS перпендикулярно плоскости этого треугольника.

Если $AN \perp AC$, то плоскость ALN проходит через биссектрису AL и перпендикулярна плоскости ACS, т.е.



является искомой плоскостью β.

Таким образом, центр сферы лежит на прямой пересечения плоскостей α и β - прямой AO.

С другой стороны, по условию задачи, центр сферы лежит в плоскости SBC т.е. точка $O-$ центр сферы.

Проведем $MK \perp AB$, тогда $OK \perp AB$ и $R = OK$.

Вычисления. Если $AL-$биссектриса угла SAC, то $\dfrac{LC}{SL} = \dfrac{CA}{SA} = \dfrac{13}{5}$. Следовательно, $CL = \dfrac{10}{3}$. Так как $AN \perp AC$, то $\angle CNA = 30^\circ$ и $CN = 10$. Из подобия треугольников CLN и MON следут, что $\dfrac{OM}{CL} = \dfrac{MN}{CN} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow OM = \dfrac{5}{2}$. Наконец

$$MK = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4},\ R^2 = OK^2 = \frac{25}{4} + \frac{75}{16} = \frac{175}{16}.$$

Ответ: $R = \dfrac{5\sqrt{7}}{4}$.

§ 6. Задачи для самостоятельного решения [1]

1. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна c, а радиус вписанного шара равен R

2. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол между основанием и боковой гранью равен $\pi/3$ Найдите отношение объема пирамиды к объему вписанного в нее шара.

3. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна c. Каждое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол α Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

4. Найдите радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, если расстояние от центра шара до боковой грани равно a, а до бокового ребра – b.

5. Найдите радиус шара, касающегося всех ребер правильного тетраэдра, если ребро тетраэдра равно a.

6. Шар касается всех ребер куба. Найдите площадь части поверхности шара, лежащей внутри куба, если ребро куба равно 1.

7. Шар радиуса R вписан в прямую призму, основанием которого является трапеция со средней линией, равной a. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

8. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Внутри куба расположены касающиеся друг друга два шара, причем первый касается трех граней куба, сходящихся в вершине A, а второй – трех граней, сходящихся в вершине C. Найдите радиусы шаров, если их величины относятся как $1:2$.

9. Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными a, и углом между ними α. Две боковые грани пирамиды, проходящие через равные стороны основания, перпендикулярны основанию, а третья боковая грань наклонена к основанию под углом α. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.

---

[1] Более сложные задачи обозначены значком *, простые – значком ^{0}.

10. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является квадрат $ABCD$ со стороной 8, ребро SA перпендикулярно основанию, $SA = 6$. Точки E, F – середины отрезков AD, CD. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду $SDEF$.

11. Ребро правильного тетраэдра равно b. Найдите радиус сферы, касающейся боковых граней тетраэдра, если центр этой сферы лежит на основании тетраэдра.

12. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины нижнего основания куба с ребром a и касающейся ребер его верхнего основания.

13*. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ высота равна диагонали основания $ABCD$. Через вершину A параллельно BD проведено сечение пирамиды плоскостью, касающейся вписанной в пирамиду сферы. Найдите отношение площади сечения к площади основания.

14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите радиус шара, проходящего через вершины C, C_1 и касающегося прямых AB, AD, если известно, что центр шара лежит внутри куба.

15°. В куб с ребром 2 вписан шар. Определить радиус другого шара, который касается первого шара и трехгранного угла с вершиной A.

16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром a, E_1 – середина C_1D_1, F_1 – середина B_1C_1. Найдите радиус сферы, проходящей через точки E_1, F_1, A, C.

17. На ребре единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка K так, что АК = 1/3. Через точки K и A_1 проведена плоскость, касающаяся вписанного в куб шара и пересекающая AD в точке M. Найдите AM.

18. Найдите радиус шара, вписанного в треугольную пирамиду, пять ребер которой равны 2, а одно ребро равно 1.

19. $DABC$ – правильный тетраэдр с ребром 1. Найдите радиус шара, касающегося ребра AB в его середине, а также ребер AC и CD.

20. Найдите радиус шара, касающегося всех ребер правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна 2, а боковое ребро – 3.

21. Дан правильны тетраэдр $ABCD$ с ребром a. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины C, D и середины ребер AB и AC.

22. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ со стороной основания a и боковым ребром $\sqrt{2}a$. Сфера проходит через точку A и касается боковых ребер SB, SC в их серединах. Найдите радиус сферы.

23. Нижним основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб с острым углом φ. Известно, что в призму можно вписать шар диаметра d. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через BC и A_1D_1.

24. В основании пирамиды лежит квадрат со стороной a. Высота пирамиды проходит через середину одного из ребер основания и равна $a\sqrt{3}/2$. Найдите радиус описанного шара.

25. В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит прямоугольный треугольник с катетами $AC = 15$, $BC = 20$. Боковое ребро DC перпендикулярно плоскости основания. Сфера касается основания пирамиды, ребра CD и боковой грани ABD в точке P, которая лежит на высоте треугольника ABD, опущенной из вершины D. Найдите объем пирамиды, если $DP = 6$.

26*. В двугранный угол величиной $60°$ вписан шар радиуса R. Найдите радиус шара, вписанного в тот же угол и касающегося данного шара, если известно, что прямая, соединяющая центры шаров, образует с ребром двугранного угла угол $45°$.

27*. В треугольной пирамиде $ABCD$ $DC = 9$, $DB = AD$, ребро AC перпендикулярно грани ABD. Сфера радиуса 2 касается грани ABC, ребра DC, а также грани DAB в точке пересечения ее медиан. Найдите объем пирамиды.

28*. Дана пирамида $SABC$ с основанием ABC, в которой ребро AC перпендикулярно грани SAB. Шар касается грани ASC в точке S и грани ABC в точке B. Найдите радиус шара, если $AC=1$, $\angle ACB = \angle BSC = 60°$.

29. В треугольной пирамиде $SABC$ грань SAC перпендикулярна грани ABC. Кроме того, $SA=SC=1$, угол при вершине B треугольника ABC – прямой. Сфера касается грани ABC в точке B и грани SAC в точке S. Найдите радиус сферы.

30°. Сторона правильного тетраэдра равна a. Определить радиус шара, касающегося боковых ребер в вершинах основания.

31. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды $SABC$ наклонены к плоскости основания под углом $45°$. Шар касается плоскости основания ABC в точке A и, кроме того, касается вписанного в пирамиду шара. Через центр первого шара и высоту основания BD проведена плоскость. Найдите угол наклона этой плоскости к плоскости основания.

32. В правильной треугольной пирамиде $SKLM$ высота равна 6, а сторона основания равна 3. Шар, вписанный в пирамиду, касается граней LSM, MSK в точках A и B соответственно. Найдите длину отрезка AB.

33. Сфера диаметром $AD=\sqrt{3}$ касается плоскости треугольника ABC в точке A. Отрезки BD и CD пересекают сферу в точках M и N соответственно. Найдите длину отрезка MN, если $AB=3$, $AC=3\sqrt{5}$, $\angle BDC = \pi/3$.

34. Объем правильной треугольной пирамиды равен $8\sqrt{3}$, а плоскость, проходящая через сторону основания пирамиды и центр вписанного шара, перпендикулярна противолежащему ребру пирамиды. Найдите радиус вписанного шара.

35. Перпендикуляр, опущенный из центра основания правильной четырехугольной пирамиды на боковую грань, попадает в центр окружности радиуса $\sqrt{6}$, описанной около боковой грани. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.

36. Объем правильной треугольной пирамиды равен $162\sqrt{3}$, а перпендикуляр, опущенный из центра основания пирамиды на ее боковую грань, попадает в центр окружности, вписанной в боковую грань. Найдите сторону основания пирамиды.

37°. В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания и центр описанного около пирамиды шара проведена плоскость, образующая с основанием угол $arctg$ (2.3). Найдите косинус угла между боковой гранью и плоскостью основания.

38. Радиус шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду $MABCD$ с основанием $ABCD$, равен 6, радиус шара, вписанного в пирамиду $MABC$, равен 4. Найдите площадь основания пирамиды.

39. ^{0} В правильной треугольной пирамиде радиус вписанного шара равен 1. Найдите радиус описанного шара, если известно, что центры этих шаров совпадают.

40. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковая грань составляет с основанием ABC угол $\arccos\ (1/9)$. В пирамиду вписан шар радиуса 2 с центром в точке О. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды $OABC$.

41. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая m, перпендикулярная плоскости этого треугольника. Шар радиуса r касается всех сторон треугольника и прямой m. Найдите расстояние от точки A до центра шара, если известно, что $AB = AC$, $\angle\ BAC = 120°$.

42. Шар радиуса R касается всех граней трехгранного угла, плоские углы при вершине которого равны 60°, 60°, 90°. Найдите расстояние от вершины угла до центра шара.

43. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Сфера касается ребер AA_1, A_1D_1, AB и пересекает ребро CC в точке M, такой, что $CM = 1/3$. Найдите радиус сферы.

44. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Две сферы одинакового радиуса касаются друг друга, причем центр первой сферы совпадает с вершиной D, а центр второй расположен внутри куба, и она касается ребер трехгранного угла с вершиной в точке A_1. Определить радиус сфер.

45. В пирамиде $ABCD$ ребро DC перпендикулярно плоскости основания ABC, $AB = 3\sqrt{3}$, $BC = 3$, $DC = \sqrt{13}$, $\angle\ ACB = 60°$. Центр сферы радиуса 5 находится в точке D. Найдите длину линии пересечения сферы и основания.

46. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = \sqrt{3}$, $BC = 5$, $AC = 2\sqrt{7}$, все боковые ребра равны 4. Сфера, центр которой лежит на продолжении ребра BS за точку S, касается плоскости основания и проходит через точку S. Найдите радиус сферы.

47°. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 5. Точки K и L расположены на ребрах B_1C_1 , CD соответственно так, что $B_1K : KC_1 = DL : LC = 1:2$. Центр шара, касающегося плоскостей $ABCD$ и ABB_1A_1, лежит на отрезке KL. Найдите радиус шара.

48. В пирамиде $ABCD$ ребра DA, AB, BC попарно перпендикулярны и равны 3. Точка M расположена на ребре BD так, что $DM : MB = 1:2$. Шар с центром на прямой AC касается ребра BD в точке M. Найдите радиус шара.

49^0. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Точка Q – центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки B, D, C_1, Q.

50. Длина ребра правильного тетраэдра $SABC$ равна $\sqrt{2}$, NM – средняя линия треугольника BSC, параллельная BC. Шар касается лучей AS, AB, AC и отрезка MN, его центр лежит вне тетраэдра. Найдите радиус шара.

51*. В основании треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC со стороной a. Ребро AA_1 перпендикулярно ребру BC и образует угол $60°$ с плоскостью основания ABC. Найдите объем призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.

52. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной $4a$, высота пирамиды равна $4\sqrt{2}a$. Через вершину B параллельно AC проведена плоскость, касающаяся вписанного в пирамиду шара. В каком отношении эта плоскость делит высоту пирамиды (SD)?

53. В основании пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 6$, $BD = 8$. Перпендикуляр, опущенный из вершины S на основание, пересекает основание в точке H – середине ребра BC. Найдите объем пирамиды, если известно, что существует сфера, касающаяся ребер основания, а прямая SH касается сферы в точке S.

54. В правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ вписана сфера с центром в точке O. Прямая AO пересекает грань BB_1C_1C в точке M. Найдите объем призмы, если $B_1M = \sqrt{13}$.

55. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания равна $4\sqrt{3}$, высота пирамиды равна 12. Точки M, N, K – середины ребер AS, BS, CS. Найдите радиус шара, касающегося основания пирамиды и прямых AK, CN, BM.

56. В треугольной пирамиде $SABC$ боковая грань SBC образует с плоскостью основания ABC двугранный угол, равный $\frac{\pi}{4}$. Треугольники SBC, ABC – равнобедренные с общим основанием $BC = a$. Высота пирамиды равна h. Центр шара, описанного около пирамиды, лежит в плоскости основания. Найдите радиус описанного шара.

57. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 2. Перпендикуляр, опущенный из центра описанного около пирамиды шара на боковую грань, образует с высотой угол $arcctg\ \frac{3}{5}$. Найдите объем пирамиды.

58. В треугольной пирамиде длины ребер равны $15,\ 9,\ 9,\ 12,\ 12,\ 3$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

59. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами $6,\ 8,\ 10,$ все боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним углом. Найдите высоту пирамиды, если радиус описанной около пирамиды сферы равен 7.

60. Сфера пересекает ребро CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в точках C_1 и K $(C_1K = 4)$ и касается всех ребер ломаной $BCAA_1B_1$. Найдите объем призмы и радиус сферы.

61. Ребро куба равно 1. Найдите радиус сферы, касающейся ребер $BA,\ BB_1,\ BC$ и плоскости A_1DC.

62. В основании пирамиды лежит квадрат $ABCD$ со стороной a, боковое ребро $DS = \sqrt{2}a$ и перпендикулярно основанию. Найдите радиус вписанной в пирамиду сферы.

63. В треугольной пирамиде $SABC$ грань SAC перпендикулярна основанию ABC $(SA = SC = 1)$, а угол при вершине B треугольника ABC – прямой. Шар касается основания пирамиды в точке B, а грани SAC – в точке S. Найдите радиус шара.

64. Основание пирамиды $SABC$ – ромб со стороной a, $SA = SC = a$, $SB = SD$, $\angle BCD = 2\alpha$. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.

65. Сфера пересекает ребро CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в точках C_1 и K $(C_1K = 4)$ и касается всех ребер ломаной $BCAA_1B_1$. Найдите объем призмы и радиус сферы.

66. Ребро куба равно 1. Найдите радиус сферы, касающейся:

а) ребер BA, BB_1, BC и плоскости A_1DC_1;

б) ребер BA, BB_1, BC и прямой DA_1.

67. В основании пирамиды лежит квадрат $ABCD$ со стороной a, боковое ребро $DS = \sqrt{2}a$ и перпендикулярно основанию. Найдите радиус вписанной в пирамиду сферы.

Ответы:

1. $\frac{1}{6}\frac{\sqrt{3}Rc^4}{c^2-12R^2}$ \ 2. $\frac{9}{\pi}$ \ 3. $\frac{c}{2\sin 2\alpha}$ \ 4. $\frac{a^2\,b^2}{a^2-2b^2}$ \ 5. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ \

6. $3\pi\sqrt{2}-4\pi$ \ 7. $8aR$ \ 8. $\frac{2a}{5};\frac{4a}{5}$ \ 9. $\frac{a\sin\alpha}{\cos{}^{\alpha}\!/_{2}+1}$ \ 10. $32+4\sqrt{22}$

11. $\frac{b\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ \ 12. $\frac{a\sqrt{41}}{8}$ \ 13. $1:3$ \ 14. $\frac{a\sqrt{25+16\sqrt{2}}}{2}$ \ 15. $2-\sqrt{3}$ \ 16. $\frac{\sqrt{41}\,a}{8}$

17. $\frac{7}{13}$ \ 18. $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{15}+4\sqrt{3}}$ \ 19. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ \ 20. $\frac{4}{\sqrt{23}}$ \ 21. $\frac{\sqrt{11}}{8}$ \ 22. $\frac{\sqrt{115}a}{8}$ \ 23. $\frac{d^2\sqrt{2}}{\sin\varphi}$

24. $\frac{a\sqrt{21}}{6}$ \ 25. 450 \ 26. $R\frac{9\pm 2\sqrt{2}}{7}$ \ 27. 36 \ 28. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ \ 29. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ \ 30. $\frac{a}{\sqrt{2}}$

31. $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{6}$ \ 32. $\frac{9}{7}$ \ 33. $\frac{3}{4}$ \ 34. 1 \ 35. 3 \ 36. 18 \ 37. $\frac{1}{\sqrt{26}}$ \ 38. 288 \

39. 3 \ 40. 6 \ 41. $\frac{5R^2}{4}$ \ 42. $R\sqrt{5+2\sqrt{3}}$ \ 43. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ \ 44. $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}$ \ 45. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

46. 12 \ 47. $\frac{15}{4}$ \ 48. 3 \ 49. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ \ 50. $1+\frac{\sqrt{5}}{4}$ \ 51. $\frac{3}{4(2+\sqrt{13})}$ \

52. $1:2$ \ 53. 28/5 \ 54. $48\sqrt{3}$ \ 55. 2 \ 56. $\sqrt{\frac{a^2}{4}+(h-\frac{a^2}{8h})^2}$ \ 57. 3.84 \

59. 7. 5 \ 59. $8(7\pm 2\sqrt{6})$ \ 60. $18\sqrt{3}$ \ 61. $\frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{3}$ \

62. $\dfrac{2a}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ \ 63. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ \ 64. $\dfrac{a\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}+\cos\alpha}$ \

65. $\sqrt{7}$; $18\sqrt{3}$ \ 66. $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+3}$; $2\sqrt{2}-\sqrt{5}$ \ 67. $\dfrac{2a}{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ \

Список рекомендуемой литературы

1. *Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И.* Стереометрия. Геометрия в пространстве. Висагинас: Alfa, 1998.

2. *Белоносов В. С., Фокин М. В.* Задачи вступительных экзаменов по математике. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во., 2005.

3. *Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х.* Пособие по математике для поступающих в вузы. М.: Наука, 1973; 2003.

4. *Литвиненко В. Н.* Практикум по элементарной математике. Стереометрия. М.: Вербум-М, 2001.

5. *Лурье М. В.* Геометрия. Техника решения задач. М: Физматлит, 2002.

6. *Методическое* пособие по математике для поступающих в вузы / Под ред. М. И. Шабунина. М.: Физматкнига, 2008.

7. *Никитин А. А. и др.* Учебник для одиннадцатых классов специализированных учебно-научных центров. Новосибирск: НГУ, 2003. Ч. 1–2.

8. *Осипов В. Д.* Конкурсные задачи по математике. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004.

9. *Цыпкин А. Г., Пинский А. И.* Справочное пособие по математике с методами решения задач для поступающих в вузы. М.: «Изд. дом «Оникс 21 век»». Изд-во «Мир и образование», 2005.

10. *Шабунин М. И.* Математика для поступающих в вузы. М.: Бином; Лаборатория знаний, 2003.

13. *Калинин А. Ю., Терешин Д. А.* Стереометрия 11. М.: Физматкнига, 2005.

Содержание

Учебное издание

Шары
и многогранники

Чуваков Валерий Петрович
(chv@uriit.ru)

Югорский физико-математический лицей
г. Ханты-Мансийск, ул. Мира, 151
сайт лицея: ugrafmsh.ru